Title	有限群の自己同型と指標について(有限群論)
Author(s)	松山, 廣
Citation	数理解析研究所講究録 (1982), 475: 22-25
Issue Date	1982-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/103306
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
475巻 1982年 22-25

有限群の自己同型と指標について

兵庫教大　松山 廣　(Hiroshi Matuyama)

Gを有限群，σをGの自己同型とし，$\Gamma = G\langle\sigma\rangle$（半直積）とおく。又$H = C_G(\sigma)$とし，$h_1 = 1, h_2, \cdots, h_\alpha$ をHの共役類の代表系とする。さらに，$X(h_i) = \{g^{-1}h_i g^\sigma \mid g \in G\}$, $i = 1, 2, \cdots, \alpha$，とおく。特に$X = X(h_1)$とする。

定義　$G = \bigcup_{i=1}^{\alpha} X(h_i)$ のとき，σを quasi-coprime automorphism of G という（以下略して，q.c.a と書く）。

q.c.a については，以下の事実が成立する。

(i) $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_t$ をσのΓに於ける共役全体とする。σがGのq.c.a.である条件は $G\sigma = \bigcup_{i=1}^{t} C_G(\sigma_i)\sigma_i$ となることである。又このとき，和 $\bigcup_{i=1}^{t} C_G(\sigma_i)\sigma_i$ は disjoint sum となる。

(ii) σの位数とHの位数が互いに素ならば，σはq.c.a.である（逆は成立しない）。

(iii) σをGのq.c.a.とすると，次のことが成立する。

(イ) 和 $\bigcup_{i=1}^{\alpha} X(h_i)$ は disjoint sum である。

(ロ) $\langle \sigma^m \rangle = \langle \sigma \rangle$ となる σ^m も G の g.C.a. である。

(ハ) H の2元が G で共役であるならば，H で共役である。

さて $Irr_\sigma(G)$ で G の複素既約指標で σ-不変なもの全体のなす集合を表すとする。今，$Irr_\sigma(G) = \{\chi_1 = 1, \chi_2, \cdots, \chi_\beta\}$ とおく。Brauer により，β は σ-不変な G の共役類の個数と一致する。σ が g.C.a. のとき，$\alpha = \beta$ が示される。

定義　$\chi \in Irr_\sigma(G)$ の Γ への拡張 χ^* と $\langle \sigma \rangle$ の生成元 σ^m によって定まる H 上の類函数 $\psi(\chi^*, \sigma^m)$ を $\psi(\chi^*, \sigma^m)(h) = \chi^*(h\sigma^m)$ $(h \in H)$ で定義する。

定義　$\alpha = \beta$ と仮定する。$Irr_\sigma(G)$ から $Irr(H)$ への bijection π が次の条件をみたすとき，Glauberman 対応 (w.r.t. σ) という。「$\chi \in Irr_\sigma(G)$ とする。χ の任意の Γ への拡張 χ^* に対して $\psi(\chi^*, \sigma)$ は，$\pi(\chi)$ のスカラー（0でない）倍である。」

Glauberman は[1]で，$|\sigma|$ と $|G|$ が素なとき（本質的に，$|\sigma|$ と $|H|$ が素なとき）Glauberman 対応の存在を示した。しかし，Glauberman 対応の成り立つ自己同型は次の様に特徴づけられる。

定理A．σ が G の g.C.a. である条件は Glauberman 対応が存在することである。

さらに[1]で示された（作用群が巡回群の場合の）結果のほとんどが，σ が g.C.a. であるという仮定のもとで成立する。

定理B. $\mathfrak{A}$をGのS.C.A.とする。πをGlauberman対応とし $\pi(\chi_i)=\theta_i$, $i=1,2,\dots,\alpha$ とおくと次のことが成り立つ。

(i) χ_iのΓへの拡張χ_i^*で，$\langle\mathfrak{A}\rangle$の生成元のなす集合上で一定値$\varepsilon_i\theta_i(1)$をとるものが一意に存在する，ここで$\varepsilon_i$は$|\mathfrak{A}|$が奇数ならば$\pm1$で$|\mathfrak{A}|$が偶数ならば1である，$i=1,2,\dots,\alpha$。

各$\chi_i\in\mathrm{Irr}_{\mathfrak{A}}(G)$に対して，(i)により一意に定まる$\Gamma$への拡張をCanonical extensionということにする。

(ii) $\psi(\chi_i^*,\mathfrak{A}^m)$も$\pi(\chi_i)$の(0でない)スカラー倍である。但し，$\mathfrak{A}^m$は$\langle\mathfrak{A}\rangle$の生成元で，$\chi_i^*$は$\chi_i$の拡張とする。

(iii) $\mathfrak{A}$の位数が素数pの巾とすると，

$$[\chi_i|_H,\ \theta_j]_H \equiv \delta_{ij}\varepsilon_i \pmod{p}, \quad 1\le i,j\le\alpha$$

である。但し，δ_{ij}はKroneckerの記号，ε_iは(i)で定まるもの。

(iv) $\chi_i(1)$は$t\theta_i(1)$を割りきる，$i=1,2,\dots,\alpha$。但し，$t=|G:H|$

(v) χ_i^*をχ_iのCanonical extensionとし，R_i^*をχ_i^*を与えるΓの表現とする，又$R_i=R_i^*|_G$とおく，$i=1,2,\dots,\alpha$。このとき，

$$R_i(\hat{X}) = \varepsilon_i t\,\theta_i(1)/\chi_i(1)\ R_i^*(\mathfrak{A}), \quad i=1,2,\dots,\alpha.$$

が成り立つ。但し，$\hat{X}=\sum_{x\in X}x \in \mathbb{C}[G]$である。

(注意) 定理Bの(i)で定義したCanonical extensionsは，Glauberman [1] の意味でのCanonical extensionsとは必ずしも一致しないが，$\mathfrak{A}$の位数が奇数で$|H|$と素な場合か$\mathfrak{A}$の位数が奇素数のときは一致することが示される。

Gの既約指標がα一不変かどうかは，次の系Cにより判定できる。

系C. χをGの既約指標とする。χがα一不変となる条件は，$\chi(\alpha)\neq 0$となることである。(但し，αはGのq.c.a.とする.)

以上の証明は[2]で発表する予定です。

[1]. G. Glauberman; *Correspondences of characters for relatively prime operator groups*, Canad. J. Math. 20 (1968) 1465–1488.

[2] H. Matsuyama; Quasi-co-prime automorphisms and the Glauberman correspondence of finite groups, preprint.